相变与临界现象课程小论文

邱俊斌 [1]

(1.中山大学物理学院物理系, 广州　510000)

日期：July 20, 2020

1　引入

日常生活中相变现象无处不在，冰融化成水，水沸腾变成水蒸汽，因此，研究相变的动力学机制是非常重要的一个课题。为了解释相变现象，前人们发展了许多理论，最著名的两个方法是Landau平均场理论和重整化理论。平均场理论用一个简单的模型解释了众多不同系统的相变现象。但平均场理论的缺陷在于，相变临界点附近会有很大的误差。这时候就需要利用重整化理论，在相变临界点附近计算临界指数，从而描述相变现象。不仅如此，重整化理论还告诉我们，许多不同的系统，只要他们拥有相同的临界指数，那么它们就归入同一个普适类中。相同的普适类，意味着在临界点附近的动力学机制也是类似的，与具体物质，相互作用形式是无关的。这一发现，大大简化了我们对相变研究的复杂度和难度。

本文主要是对本学期学习的相变相关理论进行一些总结，内容主要是根据钟凡老师的课件，并参考了Pathria和Beale的*Statistical Mechanics*教材[1]，以及Nishimori和Ortiz的*Elements of Phase Transitions and Critical Phenomena*教材[2]。

2　相与相变

相，是指系统中物理性质和化学性质完全相同的均匀部分。相变，是指在特定条件下相的变换。以水为例，在不同的温度和气压条件下，常见的物态有固态、液态、气态。如今我们发现水甚至存在十几种物相，如图1所示。

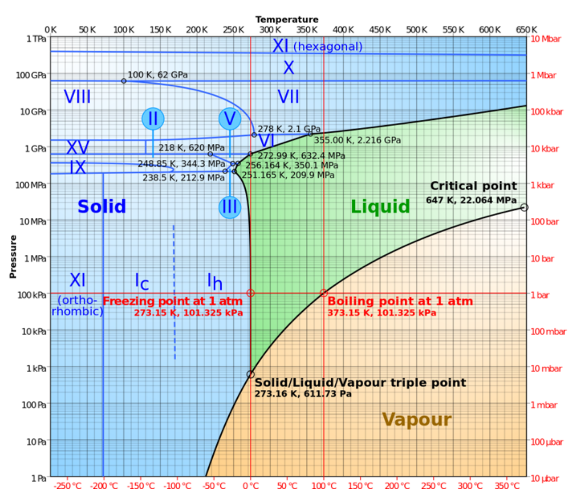

图 1

为了对相变进行分类，若相变临界点处化学势的$n-1$阶导连续，而n阶导不连续，我们称这种相变为n级相变。当$n=1$时，为一级相变，也称作不连续相变。常见的特性有：熵不连续、有潜热。当$n\geq 1$时，称作连续相变，常见的的特性有：没有相界、没有潜热。除此以外，相变还可以根据结构和动力学机制的不同进行分类。后面我们将看到连续相变和一级相变的区别。

3 Landau平均场理论

在Landau提出平均场理论之前，就已经有了许多用来描述相变的理论。最为著名的就是Van der Waals方程$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=RT$。这个方程经过等面积法调整后，可以用来描述气液转变过程。但是，这些理论往往只能描述一种或一类物质，并不具有普遍性。

3.1 理论核心

首先，我们定义一个物理量称为序参量，用来描述系统的对称性程度。序参量是对一个系统的某个物理量的抽象概念，对于不同的系统实际描述的物理量是不同的。以铁磁系统为例，此时序参量就是这个系统的磁矩大小。磁矩是铁磁系统每个格点自旋大小的平均，磁矩(的绝对值)越大，整体而言自旋越有指向性(向上或向下)，也就是系统越有序。对于其它系统序参量的定义，可参考图2中的定义。

表 4-1 几种连续相变的类比

相变名称	序参量	对偶场	破缺的对称	恢复对称的模式
气液临界点	$\rho_{液}-\rho_{气}$	压力P	反　射	声波
有序-无序、溶液混合	$\rho_1-\rho_2$	化学势μ	反　射	声波
单轴铁磁体	M	H	$M\longleftrightarrow -M$	自旋波
单轴反铁磁体	次晶格M	交错场H	次晶格 $M\leftrightarrow -M$	自旋波
各向同性铁磁体	M	H	三维转动群	自旋波
铁电体	P	E	晶体对称群	软模
超　导	能隙Δ	无经典对应	$U(1)$ 规范群	集体激发
超　流	波函数ψ	无经典对应	$U(1)$ 规范群	集体激发

图 2

我们把自由能写作与序参量相关的形式$G(T,P,M)$，并关于M作Taylor展开：

$$G(T,P,M)=G_0(T,P)+\frac{1}{2}rM^2+\frac{1}{3}AM^3+\frac{1}{4}uM^4+\frac{1}{5}BM^5+\frac{1}{6}vM^6+\cdots-HM$$

其中，H是外场大小。在热平衡的条件下，自由能为极小值，要求满足$\frac{\partial G}{\partial M}=0$，$\frac{\partial^2 G}{\partial M^2}>0$。

这里，Landau作了两个重要的假设。一是无外场，即$H=0$；二是自由能有反演对称性，即$G(M)=G(-M)$，容易得到所有奇次项系数为0。

3.2 M的四次项——连续相变

下面我们考虑一个具有反演对称性的、无外场、保留到M四次项的模型，自由能为：

$$G(T,P,M)=G_0(T,P)+\frac{1}{2}rM^2+\frac{1}{4}uM^4$$

由于热力学稳定性要求$\frac{\partial^2 G}{\partial M^2} > 0$，可得$u > 0$，并假设$u$在临界点附近缓变，可以看作一个常数。定义约化温度$t \equiv (T - T_c)/T_c$，$T_c$为临界温度，此时系数$r$可以写作$r = r(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k t^k$。当$t \to 0$时，我们忽略二阶及更高阶项，为了后面计算的磁化率是有物理意义的结果，因此$r_0 = 0$。因此，$r = r_1 t = a(T - T_c)$，其中$a \equiv r_1/T_c$。

根据$\frac{\partial G}{\partial M} = 0$，可以解出$M = 0$和$M = \pm\sqrt{-r/u} \propto \pm|T - T_c|^{\frac{1}{2}}$。对于第一个解$M = 0$，要求$r > 0$，此时温度大于临界温度，为无序解。对于第二个解$M \propto \pm|T - T_c|^{\frac{1}{2}}$，要求$r < 0$，此时温度小于临界温度，为有序解。图3为序参量$M$关于温度$T$的曲线，可以看到序参量是连续变化的，因此这种相变是连续相变。

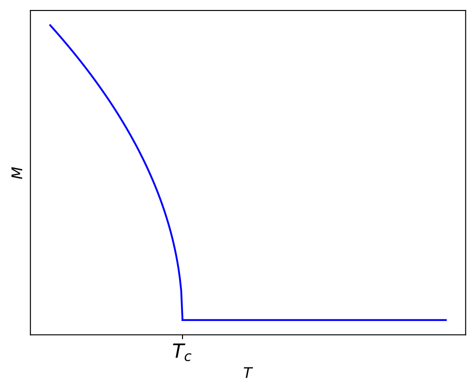

图 3

利用M的显式表达式容易得到熵S，热容c_p和磁化率χ的表达式：

$$S = -\frac{\partial G}{\partial T} = S_0 - \frac{\partial}{\partial T}\left[-rM^2 + \frac{1}{4}uM^4\right] = \begin{cases} S_0 + \frac{a^2}{2u}(T - T_c) & ,T < T_c \\ S_0 & ,T > T_c \end{cases}$$

$$c_p = T\frac{\partial S}{\partial T} = \begin{cases} C_p + \frac{a^2}{2u}T & ,T < T_C \\ C_0 & ,T > T_C \end{cases}$$

$$\chi = \left(\frac{\partial^2 G}{\partial M^2}\right)^{-1} = \frac{1}{r + 3uM^2} = \begin{cases} \frac{1}{a(T-T_c)} & ,T > T_c \\ \frac{1}{2a(T_c-T)} & ,T < T_c \end{cases}$$

3.3 M的六次项——一级相变

具有反演对称性的、无外场、保留到M六次项的模型，也称作Landau-Devonshire理论。与上一小节类似，我们先写出自由能：

$$G(T, P, M) = G_0(T, P) + \frac{1}{2}rM^2 + \frac{1}{4}uM^4 + \frac{1}{6}vM^6$$

热力学稳定性要求$\frac{\partial^2 G}{\partial M^2} > 0$，因此$v > 0$，并假设$v$在临界点附近缓变，可以看作一个常数。此时$r$和$u$的符号并不能确定。若$u > 0$，此时将回到上一小节连续相变的形式，序参量的$M$大小取决于$r$的符号。$u = 0$也是类似的情况，只需对上一小节的结果中$M$的指数作一些修改即可。因此，我们本节讨论的是$u > 0$情况，并假设为一个常数。

令$\frac{\partial G}{\partial M} = 0$，可以得到$M = 0$，和$M_{\pm}^2 = \frac{-u\pm\sqrt{u^2-4vr}}{2v}$两组解。图4是自由能与序参量，随着温度上升的变化曲线。

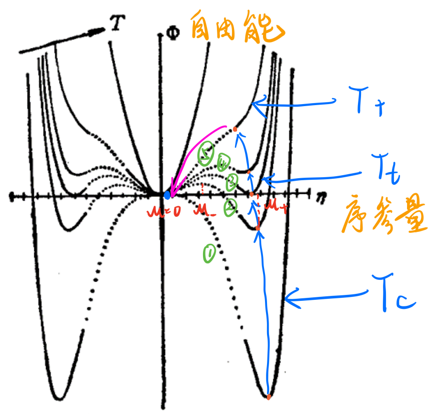

图 4

可以看到，当温度T较低时。M_-的解可能并不存在，如曲线①所示。当温度上升到临界值时，开始出现M_-的解。临界值要求$M_- = 0$，可以解得$T = T_c$。

当温度继续上升，同时有M_0、M_-、M_+三个解。根据自由能最小和稳定性原则，此时系统会倾向处于M_+解的状态，如曲线②所示。

当M_0解和M_+解的自由能相等时，即$G(M = 0) = G(M = M_+) = 0$，此时来到了第二个临界温度，可以解得$T = T_t \equiv T_C + 3u^2/16av$，如曲线③所示。如果温度继续上升，此时仍有$M_0$、$M_-$、$M_+$三个解，但是$G(M = 0) < G(M = M_+)$，系统将从$M_+$跃变到$M_0$，之后会倾向处于$M_0$解的状态，因此此时为相变点。

如果温度继续上升，如曲线④所示，系统将从M_+跃变到M_0，序参量跃变量$\Delta M \equiv M_+ - M_0 = \sqrt{-3u/4v}$。同时也能计算得到$T = T_t$时的势垒$G\left(M_- = \sqrt{-u/4v}\right) - G(0) = -u^3/96v$。由于势垒的存在，系统仍有一定的概率处于$M_+$的状态。

当温度上升到第三个临界点，此时M_-、M_+解同时消失，如曲线⑤所示。数学上当$M_\pm$解的根号内$u^2 - 4vr = 0$，可得$T = T_+ \equiv T_C + \frac{u^2}{4av}$。此时系统一定处于$M_0$的状态，因此$T = T_+$也称为$M_+$相的稳定极限。

可以看到，在相变点$T = T_t$前后，序参量会发生跃变，因此此时描述的是一级相变。

3.4 局限性

平均场理论无需考虑具体的物质，用一个简单的框架统一了连续相变和一级相变，这一切看上去都非常完美。但是，由于涨落和关联的原因，平均场理论在临界点附近反而会出现很大的误差，此时平均场理论就有了很大的局限性。

为了说明这一点，我们先假设临界点附近的涨落不大，根据平均场理论，我们对自由能F关于M作 Taylor展开：

$$F(T, V, M) = \frac{1}{2}\int d\vec{x}\left[rM(\vec{x})^2 + K(\nabla M(\vec{x}))^2\right], (K > 0)$$

与前一小节不同的是，前面我们假设M是一个标量，这里我们认为$M = M(\vec{x})$与具体位置有关。为了处理积分中梯度的麻烦，我们对$M(\vec{x})$作Fourier变换：

$$M(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} M_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

容易得到：

$$F(T,V,M)=\frac{V}{2}\sum_{\vec{k}}\left|M_{\vec{k}}\right|^2 r\left(1+k^2\xi_c^2\right)$$

其中$\xi_c\equiv\sqrt{K/r}=\sqrt{K/a}\,(T-T_c)^{-1/2}$称作关联长度。显然，当$T\to T_c$时，将$\xi_c$趋近于$\infty$。但是，此时$\xi_c$的物理意义仍不明确。

我们知道一个状态出现的几率$\propto e^{-\beta F}$，这里我们不妨假设$\langle M(\vec{x})\rangle=0$，此时平衡时$F=0$，因此$F$的大小将表示为涨落能量的大小，涨落几率$\propto e^{-\beta F}$。此时均方几率为：

$$\left\langle\left|M_{\vec{k}}\right|^2\right\rangle=\frac{k_BT}{Vr\left(1+k^2\xi_c^2\right)}$$

当$k\to 0$（长波）且当$T\to T_c$时，均方几率趋近于∞，意味着临界点附近的长波涨落将非常大。这与我们前面涨落不大的假设相矛盾，因此第一步Taylor展开的低阶项不能够被忽略，否则在临界点附近会出现很大的误差。

我们引入关联函数：

$$G(\overrightarrow{r_1}-\overrightarrow{r_2}):=\langle M(\overrightarrow{r_1})M(\overrightarrow{r_2})\rangle=\sum_{\vec{k}}\left\langle\left|M_{\vec{k}}\right|^2\right\rangle e^{i\vec{k}\cdot(\overrightarrow{r_1}-\overrightarrow{r_2})}=\frac{k_BT}{8\pi K|\overrightarrow{r_1}-\overrightarrow{r_2}|}e^{-|\overrightarrow{r_1}-\overrightarrow{r_2}|/\xi_c}$$

可以看到，关联长度处于关联函数的指数的分母处，相当于一个特征量的地位。这个物理量具有长度的量纲，因此称作特征长度，可以衡量系统关联程度大小。

为了判断平均场理论的使用范围，我们还可以引入Ginzburg判据，它包含两个物理量：

$$\begin{aligned}t_G&:=\tfrac{|T_G-T_c|}{T_c}=\left(\Delta c_p\xi_0^d\right)^{2/(4-d)}\\ \xi_G&:=\xi_0\left(\Delta c_p\xi_0^d\right)^{1/(4-d)}\end{aligned}$$

t_G称作约化Ginzburg温度，ξ_G称作Ginzburg长度。当空间维度$d>4$时，$|t|\to 0$，$|t|^{(4-d)/2}\to\infty$，因此平均场理论一定成立。当$d<4$时，平均场理论则不一定成立了。此时只有$t\gg t_G$或$\xi\ll\xi_G$，平均场理论才有效。

4 微观模型

Landau平均场理论是将所有微观模型抽象成一个系统进行研究。除此以外，如果给定一个具体的微观模型，我们还可以通过写出Hamilton量，得到配分函数，进一步求得自由能，熵，热容，磁化率等我们感兴趣的物理量。比较著名的微观模型有Ising模型、Potts模型、Heisenberg模型等等，如果涉及量子效应，还有横场Ising模型、Bose-Hubbard模型等等。下面以Ising模型为例探讨如何直接求解一些特定的微观模型。

4.1 例子：Ising模型

Ising模型可以看作由一群格点组成的系统，每个格点只有朝上朝下(+1/-1)两种自旋状态，系统的 Hamilton量可以写作：

$$H=-J\sum_{\langle i,j\rangle}S_iS_j-h\sum_i S_i$$

其中，$\langle i, j \rangle$表示只有相邻的格点才会求和。

一般来说，Ising模型有三种可能的相，分别为顺磁相、铁磁相和反铁磁相。当格点自旋的取向随机排布，宏观上磁矩$M = 0$，此时为顺磁相；当格点自旋的取向全部平行排列（同上同下），此时宏观上磁矩$M \neq 0$，为铁磁相；当格点自旋的取向反平行地排列，即相邻格点取向尽可能地相反，此时宏观上磁矩$M = 0$，为反铁磁相。

当$J < 0$时，为使自由能最小，此时相邻格点取向尽可能地相反，为反铁磁相。当$J > 0$时，格点会尽可能地取向相同，为铁磁相。

配分函数为：

$$Z = \mathrm{Tr}\, e^{-H/k_B T} = \sum_{S_1=\pm1, S_2=\pm1, \ldots S_N=\pm1} e^{[J(S_1 S_2 + S_2 S_3 + \cdots) + h(S_1 + S_2 + \cdots)]/k_B T}$$

如果$J = 0$，我们可以得到以下结果：

$$\begin{gathered} Z = 2^N \cosh\left(\frac{h}{k_B T}\right)^N \\ \langle S_i \rangle = \tanh\left(\frac{h}{k_B T}\right) \approx h/k_B T \\ M = ng\mu_B \langle S_i \rangle = ng\mu_B \tanh\left(\frac{hg\mu_B\mu_0}{k_B T}\right) \approx n\frac{(g\mu_B)^2\mu_0}{k_B T} h \\ \chi = \frac{M}{h} = n\frac{(g\mu_B)^2\mu_0}{k_B T} \end{gathered}$$

可以看到，$\chi \propto C/T$，与平均场理论结果一致。

若$J \neq 0$，此时自旋的耦合项就比较难以解决，这时我们可以作如下近似：

$$H \approx -J \sum_i S_i \sum_j \langle S_j \rangle - h \sum_i S_i$$

即为假设每个格点，受到相邻格点的作用力的大小都相同，等于相邻格点的平均作用力，这种近似称为平均场近似。忽略计算过程，我们可以得到如下结论：

$$\begin{gathered} \langle S_i \rangle = \tanh\left(\frac{h + Jz\langle S_i \rangle}{k_B T}\right) \\ M = M_0 \tanh\left[\frac{g\mu_B\mu_0\left(h + \frac{JzM}{M_0}\right)}{k_B T}\right] \end{gathered}$$

对上面二式的tanh展开可得：

$$\frac{M}{M_0} \approx \frac{g\mu_B\mu_0}{k_B T} h + \frac{Jzg\mu_B\mu_0}{k_B T}\left(\frac{M}{M_0}\right) - \frac{1}{3}\left[\frac{Jzg\mu_B\mu_0}{k_B T}\left(\frac{M}{M_0}\right)\right]^3$$

这与平均场理论的形式是一致的，M/M_0就是其中的序参量。由于前面计算用到了平均场近似，这也是Landau理论称为平均场理论的原因。

相变临界点为：

$$T_c = \frac{Jg\mu_B\mu_0}{k_B} z$$

临界点与空间维数d没有直接关系，只与配位数z有关，但z与d在几何上有一定的关系，因此临界点与d有间接关系。

平均场近似得到的只是近似解，一维Ising模型的严格解表明一维Ising模型没有相变，二维、三维及以上才会有相变。而且低维的Ising模型平均场解和数值解相差很大，但高维的时候相差很小，这是因为高维的时候z也会较大，格点受到平均力才更加接近附近格点的作用力（类似大数定理），平均场解才会更加准确。这也侧面验证了平均场理论只有在$d > 4$条件下才成立，若$d < 4$会由于涨落导致较大误差。

Ising模型在一维情况下没有相变现象（或者说临界温度为绝对零度$T_c = 0$），但在二维以及更高维下有相变现象。因此$d = 1$称为下临界维度，表示存在相变的最小维度。Ising模型是一个离散对称模型，格点只能取+1/-1两个分立的值。对于连续对称模型，格点自旋可以取连续的值，可以证明二维情况下仍没有相变，只有在三维及以上才有相变，此时连续对称模型的下临界维度为$d = 2$。

4.2 自发对称性破缺

有的系统具有高对称性，例如同时满足空间平移对称、空间旋转对称，而有的系统具有低对称性，例如只满足空间平移对称性。当系统从高对称性演变到低对称性，有些对称性就会被隐藏，这样的过程称作为自发对称性破缺。以Ising模型为例，高温时系统处于无序相，磁矩$M = 0$，系统有Z_2(反演)对称性，即将所有格点自旋翻转过来，系统保持不变。低温时系统属于有序相，磁矩$M \neq 0$，此时将系统所有格点自旋翻转过来，磁矩会反向，也就是说，此时系统失去了Z_2对称性。因此，相变意味着系统发生了某种对称性的破缺。

我们常用群来描述对称性。例如描述Ising模型的就是Z_2群，其它的系统可以参考图1。Ising模型中格点自旋的取值是分立的，描述对称性的Z_2群也是离散群。如果格点自旋的取值是连续的，例如Heisenberg模型，那么描述对称性的群也会是一个连续群（李群），两者是一一对应的。

5 重整化理论

Landau平均场理论在临界点附近有很大的误差，这是因为它假设自由能是序参量的解析函数，但临界点附近热力学量的奇异性与之矛盾，另一方面平均场理论忽略了涨落。因此，临界点附近的相变动力学机制，往往用重整化理论来进行描述。

5.1 临界指数与标度律

临界点附近的行为，或临界现象，无论是连续相变还是一级相变，往往都是发散的。为了处理临界点附近的发散行为，我们引入了临界指数ε，其定义如下：

$$\varepsilon = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \varphi(x)}{\ln x}$$

这里我们假设临界点为$x = 0$，φ是我们关心的物理量。此时$\varphi(x > 0) \sim x^{\varepsilon}$。

当φ取为热容c，磁矩M，磁化率χ，关联函数$G(r)$，关联长度ξ_c，可以得到我们比较关心的有六个临界指数α，β，γ，η，ν，δ，它们的定义如下：

$$
\begin{aligned}
& c \propto \begin{cases} (T-T_C)^{-\alpha}, (T>T_C) \\ (T_C-T)^{-\alpha'}, (T<T_C) \end{cases} \\
& M \propto (T-T_C)^{\beta}, (T<T_C) \\
& \chi \propto \begin{cases} (T-T_C)^{-\gamma}, (T>T_C) \\ (T_C-T)^{-\gamma'}, (T<T_C) \end{cases} \\
& G(r) \propto r^{-(d+\eta-2)}, \left(r \to \infty, T = T_C^{\pm}\right) \\
& \xi_c \propto \begin{cases} (T-T_C)^{-\nu}, (T>T_C) \\ (T_C-T)^{-\nu'}, (T<T_C) \end{cases} \\
& H \propto M^{\delta}, (T=T_C)
\end{aligned}
$$

其中，d为空间维度。可以证明，$\alpha=\alpha'$，$\gamma=\gamma'$，$\nu=\nu'$。

除此以外，这些标度指数并不是完全独立的，他们满足以下的标度律：

$$
\begin{gathered}
\alpha+2\beta+\gamma=2 \\
\gamma=\nu(2-\eta) \\
\beta\delta=\beta+\gamma \\
\alpha=2-d\nu, (d \leq 4)
\end{gathered}
$$

也就是说，六个标度指数只有两个是独立的。这些标度律的不等式形式可以从热力学中得到，但在数值上实际是相等的（也就是说不等号实际是等号）。

得到这些临界指数最简单的方法就是用平均场理论求解，除此以外我们还可以用重整化理论得到。

5.2 重整化

标度变换，就是对系统尺寸进行放大缩小的操作。而标度不变性，是指在标度变换下保持不变的物理性质。图5就是一个典型例子，如果我们把每四个自旋格点看作是一个大自旋块，这些大自旋快的自旋取决于块内小自旋的方向，这相当于一种缩小操作。如果小自旋格点数量为N，大自旋块数量为N'，他们满足$N'=L^{-d}N$。其中d是空间维度，L是缩放的比例因子，这个例子中$d=2$，$L=2$。经过这样的“缩小”变换后，由大自旋块组成的系统和小自旋组成的系统，在宏观上并没有什么不同，这就是标度不变性。

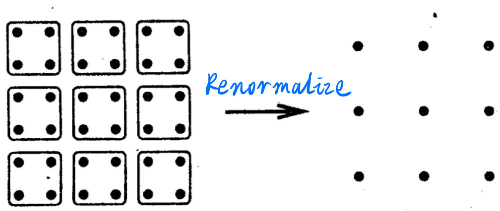

图 5

而重整化理论的核心思想是，在临界点附近，涨落非常大，关联长度ξ_c趋于∞，因此即使在临界点附近进行标度变换，关联长度的变化$\xi_c'=L^{-1}\xi_c$，与我们所观测的尺度相比，几乎可以忽略不计。也就是说，在临界点附近，系统有标度不变性。

假设系统的Hamilton量与参数矢量**K**相关（其基矢可能是温度t，外场h或其它参数），经过一次格点自旋→大块自旋的变换后，有：

$$\mathbf{K}' = T(\mathbf{K})$$

这称作重整化变换，或粗粒化。这就可能存在一种情况，$\mathbf{K}^* = T(\mathbf{K}^*)$，即使经过无数次的变换，参数$\mathbf{K}^*$仍保持不变，此时$\mathbf{K}^*$称作不动点。在不动点上，每经过一次变换，关联长度$\xi_c$都会变小，除非在参数$\mathbf{K}^*$下，系统处于临界点，$\xi_c \to \infty$，也就是说，不动点一定是临界点。除此以外，也可能有一些点$\mathbf{K}$在经过这样的变换后，到达点$\mathbf{K}^*$，这就要求关联函数在点$\mathbf{K}$同样是趋于∞。所有的点$\mathbf{K}$组成一个曲面，曲面上$\xi_c \to \infty$，这个曲面称作为临界面。面上的每一个点，对应不同系统的临界点，而且在连续的重整化变换下，会不断地流向不动点$\mathbf{K}^*$。

为了探究不动点$\mathbf{K}^*$的性质，我们可以考虑不动点附近的无穷小偏离，重整化变换前：$\mathbf{K} = \mathbf{K}^* + \delta\mathbf{K}$，重整化变换后：$\mathbf{K}' = \mathbf{K}^* + \delta\mathbf{K}'$，满足$\mathbf{K}^* = T(\mathbf{K}^*)$，$\mathbf{K}' = T(\mathbf{K})$。容易得到，$\delta\mathbf{K}' = A\delta\mathbf{K}$，$A$是Jacobi矩阵，其本征值和本征矢满足$A\vec{e}_1 = \lambda_1\vec{e}_1$，$A\vec{e}_2 = \lambda_2\vec{e}_2$。不妨对$\delta\mathbf{K}$关于$\{\vec{e}_i\}$展开，即：$\delta\mathbf{K} = \delta u_1\vec{e}_1 + \delta u_2\vec{e}_2$。有:

$$\delta\mathbf{K}'^{(n)} = A^{(n)}\delta\mathbf{K} = \lambda_1^n\delta u_1\vec{e}_1 + \lambda_2^n\delta u_2\vec{e}_2$$

显然λ_i的大小不同，就有可能存在不同的情况。如果$\lambda_i > 1$，δu_i将会不断变大，驱使系统远离这个不动点，这会导致这个不动点是不稳定的，因此被称作为相关量。如果$\lambda_i < 1$，δu_i会不断变小，显得越来越不重要，因此被称作为无关量。在不断的重整化变换下，此时系统将会趋于不动点。而前面介绍说临界面上的所有点都是趋于不动点的，说明临界面上所有点的相关量都等于零，均由无关量组成。如果$\lambda_i = 0$，在变换下δu_i保持不变，对系统没有影响，因此被称作边际量。

有时，λ_i也常写作$\lambda_i = L^{y_i}$，L是系统的尺度大小。

5.3 标度理论

历史上标度理论的提出要早于重整化理论，在标度假设下可以导出标度律。后来重整化理论进一步完善了标度理论。

标度理论中有一个重要的假设，即在临界点附近，标度变换前后的自由能保持一致，即$N'F(t', h') = NF(t, h)$，因此有：

$$F(t, h) = L^{-d}F(t', h') = L^{-d}F(L^x t, L^y h)$$

上式也可以通过重整化理论中，配分函数在标度变换前后保持不变的性质，推导出来。注意，这里的自由能默认是指代其奇异的部分，因此省略了下标s。t'和h'是标度变换后的温度和外场，此时x和y仍是未知的。

磁矩$M = -\frac{\partial F}{\partial h} \propto L^{-d+y}F_h(L^x t, L^y h)$，令$L = t^{-1/x}$，$h = 0$，这一步相当于将系统趋近于临界点，容易得到$M = t^{(d-y)/x}F_h(1, 0) \propto t^{(d-y)}$。对比前面临界指数可以得到：$\beta = (d-y)/x$。

类似地，可以得到$\alpha = (2x-d)/x$，$\gamma = (2y-d)/x$，$\delta = y/(d-y)$。将临界指数进行简单组合，容易得到标度律：$\alpha + 2\beta + \gamma = 2$，$\beta + \gamma = \beta\delta$。

5.4 有限尺度标度理论

前面我们所讨论的内容，都是在热力学极限的条件下，系统尺寸远大于关联长度的大小。但实际热力学系统尺寸终究是有限的，因此在实验上只需系统尺寸大于关联长度几倍，我们就可以认为满足热力学极限。

但是，在临界点附近关联长度趋于∞，此时热力学极限不再成立，系统尺寸不能看作是无穷大，因此上一小节中，$L \to \infty$的操作就不再成立，这时候我们需要探讨在L有限的情况下，结果会有什么变化。

这里我们省略了计算步骤，直接给出一些结论。此时磁化率χ和热容c可以表示为：

$$\chi(t,h) = L^{\gamma/\nu}\chi_L\left(tL^{1/\nu}\right) \propto L^{\gamma/\nu}$$

$$c(t,h) = L^{\alpha/\nu}c_L\left(tL^{1/\nu}\right) \propto L^{\alpha/\nu}$$

此时，只要在实验上得到磁化率(或热容)与温度的关系曲线，就能够求得系统的临界指数了。

6 标度性与普适性

标度性，或标度不变性，是相变的一个重要的特征，如果我们把前面自由能的表达式简化为：$f(\lambda x) = \lambda^{-\Delta}f(x)$，容易得到$y = f(x) = x^{-\Delta}$，或$\ln y = -\Delta \ln x$，$\Delta$就是临界指数。也就是说，标度性还可以表述成：两个量的对数值呈线性关系。事实上，我们生活中还有许多标度性的例子，例如几何的分形，海岸线的边界等等，当我们对这些图形放大缩小时，形状并没有发生变化，这与相变的标度变换是一样的。

在重整化群理论中还有一个重要的概念——普适类。前面介绍过临界面上的每一个都代表不同的系统，而这些点最终都会流向同一个不动点，因此我们说这些系统都属于同一个普适类。同一个普适类的临界指数都是相同的，因此他们的临界行为也是相似的。图6展示了不同的系统遵守同一个临界行为的情形。而且，在实验的基础上，还有一个普适性假设：只有空间维数d和序参量维数n决定体系的临界行为。也就是说，只要d和n相同，那么这些系统均属于同一个普适类，这与具体物质，具体相互作用无关。这将大大简化我们对不同系统的临界行为的研究。我们只需研究普适类中的某一种系统，那么普适类中所有的系统的临界行为都是已知的，这就是所谓普适性。

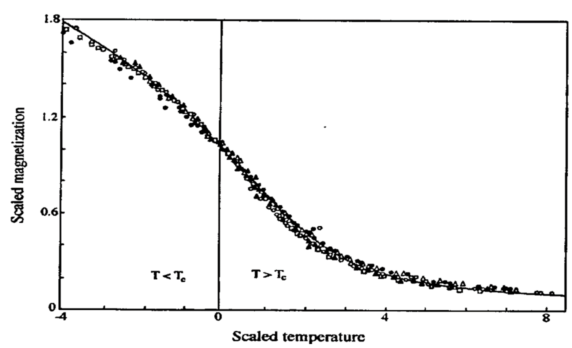

图 6

7 总结

相变与临界现象是上个世纪热门研究方向之一，一方面是因为相变竟然有如此神奇的标度性和普适性，另一方面相变在日常生活中几乎无处不在，研究相变有重要的意义。本学期主要学习了研究相变的两大工具，Landau平均场理论和重整化理论，这两个理论都有其各自的使用范围。如今相变理论也在快速发展中，

例如课堂上介绍的Φ^3理论的变温一级相变，等等。而且相变与其他学科也有重要的联系，例如凝聚态物理，材料科学，生物物理，这意味着相变将会在未来科学研究中充当越来越重要的角色。

参考文献

[1] PATHRIA R K, BEALE P D. Statistical Mechanics, Third Edition[M]. [S.l.: s.n.], 2007.
[2] NISHIMORI H, ORTIZ G. Elements of Phase Transitions and Critical Phenomena[M]. 2011. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780199577224.001.0001.